INTERETS ET LIMITES DES METHODES ALGEBRIQUES DANS UN PROBLEME DE RECHERCHE EN THEORIE DES NOMBRES.

Marie-Line GARDES, S2HEP – Université Lyon 1 – ENS Lyon – Université de Lyon.

Résumé : Dans cet article, nous présentons une ingénierie didactique autour d'un problème de recherche en théorie des nombres : la conjecture d'Erdös-Straus. Dans un premier temps nous présentons différents traitements mathématiques de la conjecture, utilisant l'algèbre, la théorie des nombres et l'algorithmique, en référence au travail de plusieurs mathématiciens. Dans un second temps, nous proposons une ingénierie didactique construite autour de la conjecture puis nous analysons les difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants lors de l'utilisation d'un outil algébrique pour traiter des questions de théorie des nombres : les limites des méthodes algébriques dans le travail de formulation de conjecture, l'importance de l'articulation des procédures syntaxiques et sémantiques dans la construction de preuve et l'importance du retour à la nature des nombres en jeu dans le contrôle et la vérifications des résultats.

Depuis plus de 20 ans de nombreuses expériences, au collège et au lycée, ont été menées sur la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques (Arsac et al. 1988, Arsac & Mante 2007, Grenier & Payan 2003, Aldon et al. 2010). Un des principaux enjeux est de mettre l'élève dans une position de chercheur lui permettant, sous certains aspects, la reproduction de la position du mathématicien. Dans notre travail, nous étudions les processus de recherche d'élèves, étudiants et chercheurs confrontés à la résolution d'un même problème ouvert (au sens non résolu) en théorie des nombres. Notre objectif est de mettre en perspective les différents processus de recherche afin de développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la résolution de problème ouvert, en prenant en compte le rôle de la dimension expérimentale dans le processus de recherche. Le problème que nous avons choisi est une conjecture d'Erdös-Straus (Erdös 1950) : *Pour tout entier naturel, on peut trouver des entiers non nuls x, y, z (non nécessairement distincts) tels que : 4/n = 1/x + 1/y +1/z.* [1]

Notre travail s'articule autour de trois grands axes : l'étude mathématique de la conjecture, une enquête d'épistémologie historique (lecture de textes de mathématiciens tels que Poincaré 1908, Hadamard 1945 et Polya 1957) et contemporaine (suivi du travail d'un mathématicien sur la résolution de ce problème) et les expérimentations avec des élèves et des étudiants. Notre analyse mathématique de la conjecture ainsi que celle des travaux de plusieurs chercheurs ont mis en évidence plusieurs méthodes relevant de différents domaines (algorithmique, algébrique, arithmétique), qui conduisent sensiblement au même résultat[1]. Les élèves et les étudiants que nous avons observés jusqu'à présent[2] utilisent majoritairement les méthodes algébriques et arithmétiques et très rarement les méthodes algorithmiques. Une première différence entre les processus de recherche des mathématiciens dont nous avons étudié les travaux et ceux des élèves et étudiants est la difficulté pour ces derniers à exploiter les méthodes algébriques pour formuler une conjecture et construire une preuve. Ce constat nous a conduite à nous interroger sur les raisons qui pourraient expliquer ces difficultés, interrogations qui entrent en résonance avec le thème du séminaire SFIDA 36, dont le descriptif indique « *nous nous intéresserons au langage algébrique pour traiter des questions de théorie des nombres* ».

---

[1] La conjecture est vérifiée pour tout entier naturel n non congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 23^2 modulo 840 grâce à des formules polynomiales. Pour ces classes de nombres restantes, il n'existe pas de formule polynomiale. De plus, la conjecture a été vérifiée pour tout $n < 10^{17}$. Pour plus de détails, voir Gardes & Mizony 2012.

[2] Une expérimentation type laboratoire est actuellement en cours.

Dans un premier temps, nous présentons la conjecture d'Erdös-Straus ainsi qu'une analyse mathématique des travaux de plusieurs chercheurs. Dans un second temps, nous proposons une ingénierie didactique construite autour de la conjecture puis nous analysons les difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants lors de l'utilisation d'un outil algébrique pour traiter des questions de théorie des nombres : les limites des méthodes algébriques dans le travail de formulation de conjecture, l'importance de l'articulation des procédures syntaxiques et sémantiques dans la construction de preuve et l'importance du retour à la nature des nombres en jeu dans le contrôle et la vérification des résultats.

1. LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS : ANALYSE MATHEMATIQUE.

1.1 Présentations de résultats

Depuis 1950, date de la publication de la conjecture par Erdös, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à cette conjecture (Oblath 1950, Rosati 1954, Bernstein 1961, Yamamoto 1964, Mordell 1969, Swett 1999, Schinzel 2000). Voici trois résultats majeurs actuellement connus :

Résultat 1 : L'équation [1] a des solutions pour tous les nombres non congrus à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840. Ces solutions sont polynomiales en *n*.

Exemple : Si $n \equiv 2[3]$ alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n+3} + \frac{1}{\frac{n-2}{3}} + \frac{1}{\frac{(n-3)(n-2)}{3}}$ [2].

La démonstration[3] de ce résultat repose sur des outils d'arithmétiques élémentaires tels que le théorème de décomposition des nombres premiers, les congruences ou le théorème des restes chinois.

Résultat 2 : Pour tous les nombres congrus à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, il n'existe pas de formule polynomiale globale en *n* donnant une solution. Ce théorème est démontré[4] grâce à de l'arithmétique dans Z[X].

Résultats 3 : La conjecture a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à 10^{14}. Ce résultat est construit grâce à plusieurs algorithmes[5].

Plus récemment, suite à notre intervention dans un séminaire en février 2009, Michel Mizony, maître de conférences à l'IREM de Lyon, s'est intéressé à la résolution de cette conjecture. Les recherches qu'il a menées l'ont conduit à établir l'identité suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}, \qquad [3]$$

où *m* est un entier naturel non nul et *d* un diviseur de m^2. L'intérêt principal de cette identité est d'obtenir une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires sous la seule condition que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. Ainsi il reformule la conjecture d'Erdös-Straus sous la forme : pour tout nombre premier *n*, il existe un entier *m* et un diviseur *d* de m^2 tels que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. La validité de cette conjecture entraîne celle d'Erdös-Straus. Cette formulation établit de plus un lien étroit entre décompositions en somme de fractions égyptiennes[6] et une propriété des nombres premiers. Un autre intérêt de cette identité est de produire de nombreuses formules polynomiales qui lui ont permis, avec un collègue[7], en juin 2010, d'établir des algorithmes afin de vérifier la conjecture pour tous les nombres premiers inférieurs à 10^{17} (Gardes et Mizony 2012).

---

[3] Cf. Mordell 1969.
[4] Cf. Schinzel 2000.
[5] Cf. Swett 1999.
[6] Une fraction égyptienne est synonyme d'une fraction unitaire.
[7] Marc Deléglise, Maître de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

Nous avons également étudié la recherche de Louis Thépault, un ingénieur chimiste, passionné par les mathématiques et auteur de plusieurs livres de casse-tête[8]. Sa démarche a été la suivante : après avoir restreint la recherche de solutions de n entier naturel à n premier, il a écrit n sous la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$, k entier naturel. Pour les nombres de la forme $4k + 3$, il a trouvé une formule polynomiale du type [2]. Pour les nombres de la forme $4k + 1$, il a établit une condition suffisante : s'il existe a et b entiers tels que b divise a^2 et $4a - 1$ divise $bn + a$, alors on a une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires. Cette décomposition est :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{an} + \frac{4a-1}{n(a+bn)} + \frac{(4a-1)b}{a(a+bn)}. \quad [4]$$

Pour établir ces résultats, Louis Thépault a utilisé des équations du second degré et notamment la somme et le produit des solutions.

1.2 Equivalence des différents résultats

L'analyse des travaux des différents chercheurs ont mis en évidence la pluralité des méthodes de recherche de la conjecture, utilisant des outils et des concepts mathématiques différents. Notre analyse mathématique nous a permis de montrer que la méthode arithmétique de Mordell, celle algorithmique et arithmétique de Mizony et celle algébrique de Thépault sont équivalentes et conduisent au même résultat. Par exemple l'identité [3] de Mizony est équivalente à l'identité [4] de Thépault avec le changement de variable $b = m^2/d$ et $a = m$. De même, Michel Mizony a montré que l'on peut obtenir l'identité [3] à partir de la décomposition obtenue avec un théorème mentionné par Mordell[9] : $\frac{4}{n} = \frac{1}{BCD} + \frac{1}{ABDn} + \frac{1}{ACDn}$ [5]. Pour cela, posons $m = ABD$ et $d = B^2D$ qui divise m^2 dans l'équation ci-dessus. Exprimons A et D en fonction de m, d, B et C : $\frac{4}{n} = \frac{B}{Cd} + \frac{B}{Cmn}$ qui se réduit à $\frac{Cd}{B} = \frac{mn+d}{4m-1}$. Or B divise $d = B^2D$, donc $(mn + d)/(4m - 1)$ est un entier. Par suite, on obtient l'identité [3]. Nous nous sommes ensuite posé la question de la réciproque afin d'obtenir une équivalence entre ces deux résultats. Nous avons ainsi montré que l'identité [3] de Michel Mizony était équivalente à la décomposition [5] de Mordell en montrant qu'il existe trois entiers A, B et D tels que $d = B^2D$ et $m = ABD$ et en posant $C = (An + B) / (4m - 1)$.

1.3 Intérêts des méthodes syntaxiques.

Dans ce paragraphe, nous montrons en quoi les méthodes syntaxiques présentent un intérêt pour la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. Précisons d'abord la définition de méthode syntaxique et sa distinction avec la méthode sémantique. L'activité syntaxique consiste en une manipulation formelle du langage où la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance. Au contraire, l'activité sémantique trouve sa source au-delà du langage, au niveau de la référence aux mots (Barrier 2008).

Au paragraphe précédent, nous avons vu que les recherches de Michel Mizony et Louis Thépault donnent une condition suffisante d'existence de solutions pour certaines valeurs de n. Ce résultat général partiel, obtenu à partir de méthodes syntaxiques (algébriques ou algorithmiques) est extrêmement efficace pour la recherche de solutions explicites de l'équation pour une valeur de n donnée. L'analyse de ces travaux de recherche montre donc

[8] Pour le plaisir de se casser la tête !, Pour le plaisir de se casser (encore plus) la tête !, Pou le plaisir de se casser (un peu) la tête !, Le chat à six-pattes et autres casse-tête, Cassez-vous la tête !. Livres édités par Dunod entre 2004 et 2008.

[9] Pour n premier, si $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$, alors il existe 4 entiers A, B, C et D, avec A, B et C premiers entre eux deux à deux tels que $x = BCD$, $y = ABD$ et $z = ACD$.

l'intérêt des méthodes syntaxiques, pour la recherche efficace de solutions et la généralisation de résultats partiels. Cependant il est important de noter que ces procédures syntaxiques ne sont pas utilisées par les chercheurs sans articulation avec l'aspect sémantique. Dans le travail de Michel Mizony, nous avons observé que la formulation de certaines progressions arithmétiques résulte dans un premier temps de procédures uniquement syntaxiques. Le contrôle sémantique intervient dans un second temps, pour déterminer les contraintes répondant aux conditions de la conjecture d'Erdös-Straus.
Exemple : A partir de l'identité [3], Michel Mizony a établi trois formules polynomiales augmentant l'efficacité de ses algorithmes de recherche de solutions explicites. Si $[n, m, d]$ est solution de [3] alors les progressions arithmétiques suivantes sont aussi solutions :
Formule 1 : $[n + (4m - 1)k\ , m\ , d]$.
Formule 2 : $\left[n + 4\frac{(mn+d)}{(4m-1)a}k, m + \frac{m}{a}k, d + \frac{d}{a}k\right]$ où $a = pgcd\left(m, d, \frac{m^2}{d}\right)$.
Formule 3 : $[n + 4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k, m + \frac{m}{a}k, d]$ où a^2est le plus grand facteur carré de $\frac{m^2}{d}$.
Pour établir ces formules, il a tout d'abord construit de nombreux algorithmes, en faisant varier différents paramètres. Il a ensuite écrit ces formules et en dernière étape, il a déterminé les conditions sur *a* pour que chaque nombre en jeu soit un entier.

Dans le travail de Louis Thépault, le contrôle sémantique s'effectue tout au long de la procédure syntaxique.

Exemple : extrait de la méthode de Louis Thépault. Dans l'équation [1], il pose $x = an$ où a est un entier naturel non nul.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{an} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$
$$\frac{4a - 1}{an} = \frac{y + z}{yz}$$
$$yz = \frac{an(y + z)}{4a - 1}$$

Comme $4a - 1$ ne divise ni a ni n^2, il divise $y + z$. Ainsi il existe un entier positif k tel que $y + z = k(4a - 1)$. D'après (5), on déduit $yz = ank$. Connaissant la somme S des deux nombres y et z et leur produit P, y et z sont les racines de l'équation du second degré en X :

$$X^2 - k(4a - 1)X + ank = 0.$$

Une condition nécessaire pour que cette équation en ait deux racines entières est que le discriminant soit un carré parfait, soit : $k^2(4a - 1)^2 - 4ank = Q^2$ avec Q un entier positif.

Cet exemple montre que Louis Thépault contrôle à chaque étape de manipulations algébriques la nature des nombres en jeu. La procédure syntaxique est donc articulée avec une procédure de contrôle sémantique.

Les recherches de Louis Thépault et Michel Mizony mettent donc en évidence l'importance de l'articulation des méthodes syntaxiques et sémantiques, en particulier lors du contrôle et de la vérification de leurs résultats.

2. UNE SITUATION DIDACTIQUE AUTOUR DE LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

2.1 Présentation de la situation

Nous avons élaboré une ingénierie didactique afin de proposer la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves et étudiants. Nous avons expérimenté de nombreuses fois et avec différents publics[10] notamment avec des classes de terminale scientifique et avec une classe préparatoire aux grandes écoles[11]. Dans cet article, nous illustrons nos analyses en appui sur deux expérimentations. La première s'est déroulée dans le cours ordinaire d'une classe de terminale scientifique avec 36 élèves. L'énoncé proposé était : peut-on trouver, pour tout entier naturel n, trois entiers naturels a, b et c tels que $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$? La seconde expérimentation a eu lieu dans une classe préparatoire aux grandes écoles avec une vingtaine d'étudiants. Nous leur avons donné l'énoncé suivant : pour quels entiers naturels (non nuls) n, peut-on trouver trois entiers naturels (non nuls) a, b, c tels que $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$?

La séance de recherche sur le problème se déroule en trois phases. Pour commencer, nous imposons une recherche individuelle de 10 minutes sur le problème afin qu'ils s'approprient le problème et exploitent des premières pistes de recherche. Ensuite ils disposent d'une heure et demie de recherche collective afin de favoriser les échanges d'idées et les interactions. Dans ce temps de recherche il leur était demandé de rédiger une affiche retraçant leur recherche, aussi bien les pistes abandonnées que les résultats restées à l'état de conjecture ou ceux démontrés. La dernière phase du travail consiste à un débat en classe entière sur chaque production de groupe ainsi qu'à une validation des résultats. Ce dispositif est géré par l'enseignant et moi-même comme un problème ouvert (Arsac & Mante 2007).

2.2 Limite des méthodes algébriques dans le travail de formulation de conjecture.

Lors de l'analyse des travaux de différents chercheurs, nous avons mis en évidence la puissance des outils algébriques pour la construction efficace et rapide de solutions partielles générales. Concernant les élèves et les étudiants, nous avons observé dans nos différentes expérimentations qu'ils sont relativement conscients de la puissance de l'algèbre pour généraliser, comme en témoigne cet exemple : *Mais là ce que j'ai trouvé c'est pour dire qu'à partir de 2 c'est possible, c'est tout con, mais le problème après c'est qu'il faut réussir à comprendre, il faut avoir un truc avec littéral pour dire que tout nombre qui correspond à ça marche. (étudiant CPGE).* Cependant cette puissante qualité de l'algèbre va les mener à exploiter davantage des procédures syntaxiques, souvent déconnectées des procédures sémantiques. Cette déconnexion entraine alors une difficulté pour les élèves et les étudiants à avancer dans leur recherche et formuler une conjecture comme l'illustre l'exemple suivant. Il s'agit du travail d'un groupe de trois étudiants en CPGE. Au début de leur recherche, ils ont transformé l'écriture de l'équation initiale grâce à une réduction au même dénominateur puis à un produit en croix :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad [6]$$

$$\frac{4}{n} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \quad [7]$$

$$4abc = n(ab + bc + ac) \quad [8]$$

Un étudiant (E1) veut alors s'engager dans une procédure algébrique à partir de l'équation [8] mais l'étudiant E2 est septique :

E1	Mais à mon avis en fait, il faudrait trouver la valeur littéral de *abc*, la valeur littérale de *n* et la valeur littérale de *ac* + *ab* + *bc* et après à tous les coups il y a des trucs qui se simplifient.
E2	Ouais mais il faut le trouver.
E1	On attaque ?
E2	Bah si tu veux mais je ne suis pas convaincu.

[10] Expérimentations en classe de Terminale Scientifique, en Club de mathématiques discrètes, en colonie de vacances scientifiques, en classe préparatoire aux grandes écoles, en formation d'enseignants.

[11] Terminale scientifique : dernière classe de l'enseignement secondaire (année du baccalauréat), élèves de 17-18 ans. Classe préparatoire aux grandes écoles : études pour entrer dans une école d'ingénieure, étudiants de 18-20 ans.

L'étudiant E1 suit quand même son idée : à partir de l'équation [8], il isole successivement *n*, *abc* et *bc* + *ac* + *ab* qu'il va ensuite injecter dans [7].

$$n^2(bc+ab+ac)^2 = 16(abc)^2$$
$$n(bc+ac+ab) = 4abc$$

Il se rend compte alors qu'il obtient de nouveau l'équation [8] : « *On retombe sur ce qu'on avait en fait. […] On tourne en rond.*» Le troisième étudiant E3 propose alors une autre méthode : à partir de l'équation [6], il isole successivement 1/*a*, 1/*b* et 1/*c* qu'il va ensuite injecter dans [6].

$$\frac{4}{n} = \frac{12abc - 2nac - 2nab - 2nbc}{abcn}$$
$$8abcn = 2n^2ac + 2n^2ab + 2n^2bc$$
$$4abc = n(ab+ac+bc)$$

Il retombe également sur l'équation [8] : « *on retrouve, on tourne en rond* ». Ces deux étudiants se sont engagés dans des méthodes uniquement syntaxiques et se rendant compte qu'ils tournent en rond, ils sont découragés. L'enseignant intervient alors pour les diriger vers la procédure de l'étudiant E2 qui cherche, de son côté, à décomposer 4/2, 4/7 et 4/3. En cherchant à décomposer 4/46, E2 écrit (vingt minutes plus tard) « pour tout *n* pair, 4/*n* = 1/*n* + 1/*n*/2 + 1/*n* » et demande à E1 et E3 de vérifier cette identité « avec n'importe quel chiffre ».

Cet exemple pointe les limites des transformations d'écriture de l'équation initiale qui n'aboutissent pas pour avancer dans la recherche, notamment pour formuler des conjectures. Cette difficulté est levée lorsque l'enseignant les dirige vers une procédure sémantique : la décomposition de quelques exemples.

2.3 Importance de l'articulation syntaxe/sémantique dans la construction de preuve.

Une autre limite de l'usage unique des méthodes algébriques par les élèves et les étudiants réside dans leur difficulté à construire une preuve. Cela a été pointé par Barrier et al (2009) avec l'exemple d'Andrew un doctorant en mathématiques qui est confronté à la conjecture suivante : Si *n est parfait, alors kn est abondant pour tout k entier naturel*[12]. Voici un extrait de dialogue entre Andrew et l'expérimentateur (traduction Barrier 2009 p. 71) :

> « ANDREW : Ok, donc si n est parfait alors kn est abondant, pour tout k. Ok, donc qu'est-ce ça, ouais on dirait, alors qu'est-ce que ça veut dire ? Ouais, alors n est parfait, et je prends chaque p_i qui divisent ce n, alors après la somme de ces p_i fait 2n. C'est la définition. Ouais, ok, en fait on prend kn, alors évidemment tous les kp_i divisent kn, en fait, on les ajoute et on obtient 2kn. Plus, on a aussi, par exemple, on a aussi k qui divise ça, qui divise kn. Donc on doit l'ajouter. A priori, en gros, il n'y a pas de problèmes, k serait le même que ça. Ouais. Et, comment celui-là va aller ? [LONGUE PAUSE]
> INTERVIEWER : Alors nous avons le même problème là-haut mais en général ? Avec un… ?
> ANDREW : Ouais. Hum, peut-on en trouver un ? D'accord, alors je ne sais pas. Un exemple.
> INTERVIEWER : J'ai des exemples pour vous.
> ANDREW : Vous avez des exemples de nombres parfaits ? OK, donc 12, on a 1 + 2 + 3 + 4 + 6, alors, ok, + 12. [INAUDIBLE] Mais c'est pas ? Ok, parfait, je voulais des nombres parfaits. OK, alors disons six. Ouais, et on a comme diviseurs 2, 4, 6, 12. Plus j'affirme qu'on a d'autres diviseurs. Ouais ! en fait c'est simple parce que, euh, parce que euh, l'argument c'est qu'on a aussi 1 qui divise, et ce diviseur n'est plus là lorsqu'on multiplie. »

Les auteurs expliquent qu' « au début de l'extrait, Andrew manipule les définitions des concepts présents dans la conjecture à évaluer. Il est donc engagé dans une procédure syntaxique […]. Néanmoins, cette stratégie minimaliste échoue dans la tentative de construire une preuve. Il cherche alors des exemples (qui lui sont fournis par l'expérimentateur) pour

[12] Cet exemple a été repris par les auteurs de (Inglis et al. 2007).

commencer une procédure sémantique […]. Ces exemples font croître la confiance d'Andrew en la validité de la conjecture. Cette argumentation, en lien direct avec le contenu de la conjecture, semble être la clef de la complétion de la stratégie d'Andrew dans la précédente méthode syntaxique. Plus précisément, la manipulation du nombre parfait 6 et de ses diviseurs lui a fourni l'argument manquant : pour tous les entiers naturels *k et n, 1 est un diviseur de kn qui* n'est pas le produit par *k d'un diviseur de n. C*'est donc en s'appuyant sur le contenu de la conjecture, en manipulant des objets mathématiques au sein d'une procédure sémantique, qu'Andrew est parvenu à construire une preuve, une stratégie gagnante dans une procédure syntaxique. » (op.cit. p.72) Ainsi, Andrew a besoin de sens pour construire sa preuve et il va la construire grâce aux exemples que l'expérimentateur lui donne.

Dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, les élèves et les étudiants que nous avons observé rencontrent des difficultés similaires pour construire une preuve. Pour illustrer ces difficultés, nous prenons l'exemple de la recherche d'un groupe d'élèves de terminale scientifique qui a davantage axé sa recherche sur l'utilisation de raisonnements ou de concepts appris dans leur cours d'arithmétique (théorème de Gauss, équations diophantiennes, congruences…). Analysons leur recherche de preuve de la conjecture ci-dessous :

1070	E 1 :00 :00	Et après pour 12, c'est $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ et puis après pour 16 ça devrait être $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ je pense ? $\frac{1}{12}$ c'est $\frac{1}{4}$ et $\frac{4}{16}$ c'est $\frac{1}{4}$ voilà ok, donc pour les multiples de 4 tu peux prouver que c'est bon quoi. Pour les divisibles par 4 tu vois que c'est bon, ça sera tout le temps les 3 même en fait.

Le groupe s'engage tout de suite dans la tentative de preuve de cette conjecture en utilisant divers raisonnements et concepts mathématiques, sans faire de lien avec les exemples évoqués et exploités pour formuler la conjecture.

Tentative de preuve par disjonction de cas.

1071	Ar	Tu peux faire par disjonction de cas, n congrus à
1072	E	à 0, à 1, à
1073	Ar	0, 1, 2, 3
1074	E	Oui, on peut le tenter hein
1075	Ar	Oui mais là, on vient de montrer le cas 0 modulo 4 alors
1076	E	Ça marche oui, ça marche tout le temps
1077	Al	Il faut le prouver
1078	Ar	Faudrait le prouver oui

Tentative de preuve à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

1090	E	Si n est congru à 0 modulo 4, là tu peux, je me demande si tu ne peux pas lancer un truc par récurrence là, non ?
1091	J	Hum hum c'est ce que j'étais en train de dire
1092	Ar	Oulà, ah oui, ok
1093	E	Là tu fais l'initialisation, tu montres que c'est égal, que 4/4k que c'est égal à 1 sur, puis tu mets k, faudrait un truc égal à 3

Retour à une tentative de preuve par disjonction de cas.

1103	E	n congru à 0 modulo 4
1104	J	n = 4k
1105	E	Oui donc c'est congru à 0 modulo 4
1106	J	n = 4k donc 4/4k ça fait 1/k
1107	Al	4k donne, avec k supérieur ou égal à
1108	J	1/k attends j'avais montré des trucs avec ça là
1109	Al	Avec k positif, strictement
1103	E	n congru à 0 modulo 4

1104	J	n = 4k
1105	E	Oui donc c'est congru à 0 modulo 4
1106	J	n = 4k donc 4/4k ça fait 1/k

Prise de conscience des difficultés éprouvées.

1119	Al	Ouais mais il faudrait le prouver ça
1120	E	De quoi ?
1121	Al	Que avec 0 ça marche
1122	E	Ouais, hein ?
1123	Al	Faut le prouver
1124	Ar	C'est hyper chaud, moi c'est ce que je suis en train de réfléchir

Après cette prise de conscience des difficultés éprouvées, les élèves se tournent vers une autre piste de recherche. Une demi-heure plus tard, un élève dit qu'il a trouvé d'autres exemples, pour n = 6, 12, 16 et 18. C'est à partir de ces nouveaux exemples qu'ils formulent une nouvelle conjecture :

1655	Al	Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi
1714	E	Bon voilà, on a pour congru à 0 et pour congru à 2 modulo 4 là

L'entrée dans une procédure sémantique grâce à l'exploitation de ces exemples leur permet de trouver l'argument qui valide leur conjecture pour les multiples de 4, à savoir *si n est multiplié par 2 alors les solutions a, b et c aussi*. Ils se rendent également compte du problème auquel ils se sont confrontés en essayant de mener un raisonnement par récurrence :

1796	J	ouais mais le problème en plus avec mon truc là c'est que, si c'est vrai, l'hypothèse est vraie à un rang mais elle n'existe pas au rang d'après.
1798	J	L'hypothèse change selon le rang.
1804	J	Donc à ce compte là, il faudrait un double raisonnement par récurrence mais ça serait faux.

Ils poursuivent leur recherche et formulent une identité qui leur permettra de construire la preuve de leur conjecture, sans utiliser de raisonnement par récurrence :

1829	E	En fait le truc, je pense que ça doit pourvoir être prouvé, en fait c'est euh $\frac{4}{n}$ c'est égal à $\frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.
1874	J	Alors si n est pair, donc t'as $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$ ok et là si n est pair c'est 2n' donc c'est $\frac{1}{n'}$ et t'as $\frac{1}{n'}$; $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.

Cet exemple illustre l'importance, pour les élèves, d'articuler les procédures syntaxiques et sémantiques pour la construction d'une preuve. En effet, il met en évidence le fait que la déconnexion des procédures syntaxiques avec toute procédure sémantique est à l'origine des tentatives vaines de preuves de leur conjecture. Lorsqu'ils tentent de prouver leur conjecture en n'utilisant que des raisonnements ou concepts arithmétiques sans faire référence aux exemples trouvés et exploités pour la formulation de la conjecture, ils sont dans une impasse. En revanche, lorsqu'ils reviennent aux exemples, ils formulent l'argument manquant pour leurs différents raisonnements et en particulier pour conduire un raisonnement par récurrence : si n est multiplié par 2, les solutions aussi. Le raisonnement par récurrence doit donc sauter un rang. Cette prise de conscience et la levée de cette difficulté pour la mise en œuvre du raisonnement par récurrence va les conduire à adapter leur raisonnement, en appui sur les exemples pour formuler une identité pour les nombres pairs, base de leur preuve de la conjecture.

La puissance de généralisation et d'efficacité de l'algèbre peut conduire les élèves dans une impasse lors de la construction d'une preuve, en particulier par manque d'outils pour conduire une preuve syntaxique. Cependant les élèves concernés parviennent, seuls, à sortir de cette difficulté en s'engageant dans une procédure sémantique dans un premier temps et en articulant leurs procédures syntaxiques et sémantiques dans un second temps. Cela met donc en évidence l'importance de cette articulation syntaxe/sémantique dans le travail de construction de preuve.

2.4 Importance du retour à la nature des objets en jeu.

Une autre difficulté liée à l'utilisation d'outils algébriques en théorie des nombres est la perte de familiarité des objets en jeu dans le problème. Cette difficulté a été pointée par Battie (Battie 2007) dans son travail sur le raisonnement en arithmétique qui « *[...] met en évidence l'absence d'une claire conscience que l'arithmétique (enseignée en terminale scientifique) concerne les entiers et que celle-ci n'exclut pas qu'une certaine attention soit portée à la nature des nombres en jeu* ». Dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, les élèves et les étudiants ont tendance à oublier de contrôler la nature des objets en jeu, autrement dit, ils ne s'assurent pas toujours que les nombres obtenus dans les décompositions proposées sous forme littérale sont des nombres entiers naturels non nuls. Illustrons notre propos avec la recherche d'un groupe d'étudiants de CPGE dont nous précisons quelques étapes :

- Essais pour différentes valeurs de *n* (2, 3, 46).
- Formulation d'une conjecture pour tout *n* pair : $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$.
- Vérification de la conjecture avec d'autres valeurs de *n* (314, 1256).
- Démonstration de la conjecture en réduisant au même dénominateur.
- Essais pour déterminer une conjecture pour les nombres impairs, à partir de leur conjecture pour les nombres pairs et des cas $n = 11$ et $n = 231$.
- Formulation d'une conjecture pour tout nombre impair ≥ 3 :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{4}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- Réflexion sur le cas $n = 1$ et formulation de la conjecture ci-dessus pour tout *n* impair.

Grâce aux enregistrements de leur recherche, nous avons pu observer que pour les nombres pairs, c'est l'exploitation des exemples qui leur a permis de formuler la conjecture et de la démontrer grâce à la nature des objets en jeu ($n/2$ est un entier car *n* est pair). C'est-à-dire qu'ils se sont posé la question de la différence entre écriture et nature des objets. Pour l'identité des nombres impairs, les étudiants l'ont aussi formulée grâce aux exemples. En revanche, ils n'ont pas contrôlé son écriture algébrique en se questionnant sur la nature des nombres en jeu, comme ils l'avaient fait pour les nombres pairs. Ils énoncent alors une conjecture fausse qu'ils pensent être vraie. Lors du débat en classe entière, la question de la démonstration de leur conjecture a été posée. Ils ont alors expliqué qu'un nombre pair multiplié par un nombre impair est un nombre pair donc $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier. Ils ne spécifient rien sur $\frac{n+1}{4}$. L'enseignant leur a alors demandé d'écrire l'identité pour $n = 1$.

<u>Extrait du débat :</u>

E = l'étudiant qui présente le travail de son groupe, P = l'enseignant de la classe, M = l'expérimentatrice et EE = les autres étudiants.

E : Donc on a trouvé pour tout *n*, c'est un nombre entier naturel différent de 0, bah c'est la formule qui a été trouvée par plusieurs groupes c'est $4/n = 1/n + 1/n/2 + 1/n$ donc ça fait $1/n + 2/n + 1/n$ on retombe sur $4/n$. Et pour tous les nombres entiers naturels impairs, donc euh, à partir de 1, on a $4/n = 1/\ (n + 1)/4 + 1/n(n + 1)/2 + 1/n(n + 1)/2$, ce qu'on, quand on multiplie un nombre pair, euh impair avec un nombre pair, on tombe sur un nombre pair.

P : Donc conclusion, vous, vous avez…

E : Nous on a trouvé pour tous les nombres différents de 0, tous les entiers naturels.

P : Donc, bah tiens, on va faire pour *n* égal.

M : Pour $n = 1$.

EE : $n = 6$.

E : $n = 1$, ça fait 1+1/2, ça fait ½, donc le 2 passe au-dessus, ça fait 2, plus 1×2/2 ça fait 1, donc ça fait, plus 1 ça fait 3 et la même chose ici, ça fait +1, ça fait 4.

[…](brouhaha)

P : Tu peux aller un peu plus doucement pour $n = 1$ quand même ?

M : Ouais, prends une craie, prends une craie et un bord de… *(brouhaha)*

P : Pour $n = 1$.

EE : Ouais ça ne marche pas, ça marche pas, on va se retrouver avec 1/1/2.

E : (*il écrit au tableau*) 1+1/4 *inaudible*

EE : Ah c'est faux, mais ça ne marche pas on a 0,5, on a 1/0,5.

E : Mais vu que tu le retournes, ça fait 2.

EE : Ouais mais t'as 1/0,5.

M : On va le laisser finir.

[…](*brouhaha*)

EE : ½ pas entier naturel, ça ne marchera pas de toute façon.

EE : On s'en fout mais ça marche à partir de *inaudible*

P : Ce qui donne ?

E : *inaudible*

EE : C'est faux ça, c'est faux, ah il ne lâchera pas, il lâchera pas !

M : Ca fait bien 4. On est d'accord que ça fait 4.

P : Ca, ça fait 4.

M : Est ce que tu réponds au problème ?

EE : Bah non !

P : On doit avoir $1/a + 1/b + 1/c$, *a* vaut combien ? *b* vaut combien ? *c* vaut combien ?

E : *a*, il vaut, oui ½.

EE : Ah voila !

Cet extrait montre qu'il est difficile pour l'étudiant qui présente le travail du groupe de comprendre pour quelle raison sa conjecture est fausse. Lors du débat, la discussion revient plusieurs fois sur le fait que l'identité est bien vraie mais que pour le problème, elle ne convient pas en raison de la nature des nombres en jeu. Nous pensons que cette difficulté du retour à la nature des nombres en jeu est étroitement liée à la connaissance des objets mobilisés. En effet, les étudiants semblent bien connaître et utiliser la parité et ses propriétés mais en revanche les congruences semblent leur être peu ou pas connues. Ce qui pourrait peut-être expliquer qu'ils étudient la nature du nombre $n(n + 1)/2$ et pas celle du nombre $(n + 1)/4$. Une raison supplémentaire est leur conception de la preuve. Pour les nombres pairs, ils justifient leur égalité en réduisant au même dénominateur ;on pourrait donc penser qu'ils sont conscients de l'avoir prouvée. Cependant, on peut en douter puisqu'à la fin de leur recherche collective un étudiant dit « *avec les nombres pairs ça marchent à tous les coups, je viens d'essayer avec 568 928 ça marche* ». Le débat confirme cette tendance qu'on les étudiants à penser que l'identité est vraie car testée sur de nombreux exemples. En effet, il aura fallu trois discussions pour que les étudiants semblent convaincus que pour prouver leur conjecture, des exemples ne suffisaient pas. On peut donc penser que, comme ce groupe arrivait en dernier, la justification grâce à la parité de ce que le nombre $n(n + 1)/2$ est un entier provienne de là.

Cet exemple montre qu'il est difficile pour les élèves et les étudiants d'exercer un contrôle sur la nature des objets en jeu lors de la mise en œuvre de manipulations algébriques dans le cadre de la résolution d'un problème en théorie des nombres. Comme nous l'avons montré au paragraphe 1 dans le travail des chercheurs, une manière de résoudre cette difficulté est d'inciter à exercer un contrôle sémantique au sein même des procédures syntaxiques ; c'est ce vers quoi le professeur oriente les élèves lors du débat en classe.

3. CONCLUSION

Dans cet article, nous nous sommes interrogée sur les raisons qui peuvent expliquer la difficulté qu'ont les élèves et les étudiants à exploiter les méthodes algébriques pour traiter un problème de théorie des nombres. L'analyse de différents travaux de chercheurs ont montré l'intérêt et l'efficacité des méthodes syntaxiques (algébriques ou algorithmiques) pour déterminer une condition suffisante de l'existence de solutions pour certaines valeurs de n et en donner une forme explicite. Nous avons également mis en valeur la pertinence de l'articulation syntaxe/sémantique dans les différents phases de la recherche et notamment l'importance du contrôle sémantique au sein des procédures syntaxiques. L'étude des productions des élèves et des étudiants sur leur recherche de la conjecture d'Erdös-Sraus a montré que l'utilisation seule de procédures algébriques entraîne plusieurs difficultés. Tout d'abord l'engagement dans des procédures uniquement syntaxiques freine l'avancement de leur recherche et peut empêcher dans certains cas la formulation de conjecture. Les élèves et les étudiants parviennent à se sortir de cette impasse en axant leur recherche sur l'aspect sémantique, c'est-à-dire en s'appuyant sur des exemples. Une seconde difficulté de l'usage unique des méthodes algébriques réside dans la difficulté pour les élèves et les étudiants à construire une preuve. Un levier pour surmonter cette difficulté est l'articulation des procédures syntaxiques et sémantiques. Enfin, l'oubli du contrôle sur la nature des objets en jeu dans le problème est une difficulté rencontrée par les élèves et les étudiants qui manipulent des expressions algébriques. Le contrôle sémantique au sein des procédures syntaxiques est alors une solution pertinente pour garder l'attention sur la nature des nombres en jeu.

Le point essentiel que nous retenons de cette analyse est l'importance de l'articulation des méthodes syntaxiques et sémantiques lorsqu'on traite des questions de théorie des nombres avec des outils algébriques. Afin notamment d'analyser plus finement les travaux des élèves et des étudiants, nous avons mis en place une expérimentation de type laboratoire (actuellement en cours) avec des élèves de terminale scientifique. Une partie de nos analyses didactiques portera sur cet aspect essentiel de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus.

BIBLIOGRAPHIE

Aldon G., Cahuet P-Y., Durand-Guerrier V., Front M., Krieger D., Mizony M., Tardy C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988). Problème *ouvert et Situation-problème*. IREM de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, 177p.

Arsac G. et Mante M. (2007). Les *pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.

Barrier T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et didactique*, 2, 3, 35-58.

Barrier T. (2009). Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques. *Thèse de doctorat*. Université Claude Bernard Lyon 1.

Barrier T., Durand-Guerrier V., Blossier T. (2009). Semantic and game-theoretical insight into proof and argumentation. In F.-L Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villier (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings* (Vol. 1 77-82). Taipei, Taiwan.

Battie V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes en arithmétique. *RDM 27/1*, 9-43.

Bernstein L. (1962). Zur Lösung der diophantischen Gleichung $\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, insbesondere im Falle $m = 4$. *Journ. F. reine angew. Math.*, vol 211, 1-10.

Erdös P. (1950). On a diophantine equation. (Hungarian, Russian, English summaries), *Mat. Lapok 1*, 192-210.

Gardes ML. (2010) Investigations arithmétiques en terminale : entre essais et conjectures. *Petit x 83*, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.

Gardes ML. Et Mizony M. (2012) La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM 87*.

Grenier D. et Payan C. (2003). Situation de recherche en classe : essai de catactérisation et proposition de modélisation. *Cahier du séminaire national de l'ARDM 2002*, 189-203.

Hadamard J. (1945). Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Blanchard. Paris. Réed. Traduction française (1993) Ed. Jacques Gagay.

Inglis M., Mejia-Ramos J.P., Simpson A. (2007). Modelling mathematical argumentation : the importance of qualification. *Educational studies in mathematics, 66, 1*, 3-21.

Mizony M. (2010). *Sur la conjecture d'Erdös-Straus*. Revue Sésamath en ligne. http://revue.sesamath.net/IMG/pdf/articleMichelMizony2.pdf (consulté le 12 avril 2012) ou http://revue.sesamath.net/spip.php?article262 (consulté le 12 avril 2012).q

Mordell LJ. (1969). *Diophantine equations*. London, New York : Academic press, 1969, chapter 30.

Oblath R. (1950). *Sur* l'équation diophantienne $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$, *Mathesis 59*, 308-316.

Poincaré H. (1908). L'invention mathématique. Bulletin de l'Institut Général Psychologique, 8è année, n°3, 175-187. Réed. (1993) Jacques Gabay.

Polya G. (1957). How to solve it : a new aspect of mathematical method. Garden City N.Y : Doubleday.

Rosati LA. (1954). Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. Bolletino *dell'Unione Matematica Italiana*, serie 3, volume 9, n.1, 59-63.

Schinzel A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. Funct. Approx. Comment. Math 28 : 187-194.

Swett A. (1999). The Erdös-Straus Conjecture. Disponible sur Internet : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm (consulté le 30 juin 2011).

Yamamoto K. (1965). On the diophantine equation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. *Mem. Fac. Sci. Kyushu University*. Ser. A. 19, 37-47.